Prirodno-matematički fakultet

Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2015

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za I razred srednje škole

1. Za realne brojeve a i b važi

$$a^3 + b^3 = 5$$
$$a^9 + b^9 = -2015.$$

Odrediti ab.

Rješenje: Primijetimo:

$$-2015 = a^9 + b^9 = (a^3 + b^3)(a^6 - a^3b^3 + b^6) = 5((a^3 + b^3)^2 - 3a^3b^3) = 5(25 - 3a^3b^3).$$

Dakle,

$$3a^3b^3 = 428 \implies ab = \sqrt[3]{428/3}$$

2. Dokazati nejednakost

$$x^4 + 2015x^2 + y^2 + 2015|y| + 2 \geq 4030x\sqrt{|y|} \tag{1}$$

Rješenje: Na osnovu odnosa između aritmetičke i geometrijske sredine, znamo

$$x^4 + 1 \geq 2x^2 \ \text{ i } \ y^2 + 1 \geq 2|y|.$$

Uvrštavajući ovo u (**??**) i opet koristeći odnos između aritmetičke i geometrijske sredine, zaključujemo:

$$\begin{aligned} x^4+2015x^2+y^2+2015|y|+2 &\geq (x^4+1)+2015x^2+(y^2+1)+2015|y| \\ &\geq 2017(x^2+|y|) \geq 2015(x^2+|y|) \geq 4030x\sqrt{|y|}. \end{aligned}$$

3. Označimo $a = \underbrace{11\ldots1}_{2015}$.

   a) Izraziti $\underbrace{11\ldots1}_{4030}$ preko a.

   b) Izraziti $10^{2015}-1$ preko a.

   c) Dokazati

$$\underbrace{11\ldots1}_{4030} = \underbrace{22\ldots2}_{2015} + \underbrace{33\ldots3^2}_{2015}.$$

   Rješenje:

   a) Važi $\underbrace{11\ldots1}_{4030} = 10^{2015}a + a$.

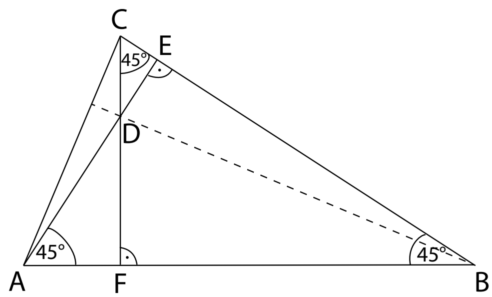
   b) Važi $10^{2015}-1 = \underbrace{99\ldots9}_{2015} = 9a$.

   c) Važi:

$$\begin{aligned} &\underbrace{11\ldots1}_{4030} - \underbrace{22\ldots2}_{2015} = \\ &\quad = (10^{2015}a+a) - 2a = (10^{2015}-1)a = \\ &\quad = 9a \cdot a = (3a)^2 = (\underbrace{33\ldots3}_{2015})^2. \end{aligned}$$

4. Dat je trougao ABC sa uglom $\angle ABC = 45^\circ$ i unutar njega tačka D takva da važi $\angle DAB = \angle DCB = 45^\circ$. Dokazati da je prava BD normalna na pravu AC.

   Rješenje: Neka je E presjek prave AD i stranice BC trougla ABC. Uočavamo da je trougao ABE jednakokraki iz čega slijedi da je $\angle AEB$ prav ugao. Dakle, $AD \perp CB$. Neka je F presječna tačka prave CD i stranice AB. Dobijamo da je trougao CFB jednkokraki, pa je



$\angle CFB$ prav ugao. Dakle, $CD \perp AB$. Zaključujemo da su AE i CF visine trougla ABC, pa je $\{D\} = AE \cap AB$ ortocentar trougla ABC. Slijedi da je $BD \perp AC$.