**Prirodno-matematički fakultet**

**Društvo matematičara i fizičara Crne Gore**

# OLIMPIJADA ZNANJA 2015

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za III razred srednje škole

1. Dokazati nejednakost

$$\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} \leq 2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

**Rješenje:** Dokaz indukcijom.

*Baza:* $n = 1$

$$\frac{1}{2\sqrt{1}} \leq 2 - \frac{2}{\sqrt{2}},$$

što je istina.

*Pretpostavka:* Za svaki $n \in \mathbf{N}$ važi

$$\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} \leq 2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

*Korak:*

$$\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} + \frac{1}{(n+2)\sqrt{n+1}}$$
$$< 2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{(n+2)\sqrt{n+1}} = 2 - \frac{2n+3}{(n+2)\sqrt{n+1}}.$$

Dokažimo $\frac{2n+3}{(n+2)\sqrt{n+1}} > \frac{2}{\sqrt{n+2}}$ tj.

$2n+3 > 2\sqrt{(n+1)(n+2)} \;\Leftrightarrow\; (2n+3)^2 > 4(n+1)(n+2) \Leftrightarrow 4n^2+12n+9 > 4n^2+12n+8$

što je očigledno tačno.

Dakle,

$$2 - \frac{2n+3}{(n+2)\sqrt{n+1}} < 2 - \frac{2}{\sqrt{n+2}}.$$

Dokaz je gotov.

2. Ako je za neko $a \neq 1$:

$$\log_x(a) + \log_y(a) = 4\log_{xy}(a)$$

tada je $x = y$. Dokazati.

**Rješenje:** Prelaskom na prirodni logoritam i dijeljenjem s $\ln a \neq 0$, dobijamo

$$\frac{\ln a}{\ln x} + \frac{\ln a}{\ln y} = 4\frac{\ln a}{\ln x + \ln y} \iff$$
$$(\ln x + \ln y)^2 = 4 \ln x \ln y \iff (\ln x - \ln y)^2 = 0 \iff x = y.$$

3. Zamislimo proceduru koja se odvija po sljedećim pravilima. Date su kartice s vrijednostima od 1, 10 i 25 bodova. Ako uložite karticu od 1 boda, dobijate karticu od 10 bodova. Ako uložite karticu od 10 bodova, dobijate 1 karticu od 1 boda i jednu karticu od 25 bodova. Ako uložite karticu od 25 bodova dobijate 2 kartice po 10 bodova.

   Na početku igrač ima jednu karticu od 10 bodova.

   Nakon nekog vremena igrač ima tačno 100 kartica sa po jednim bodom i nešto drugih kartica. Koja je najmanja vijednost kartica koju u tom trenutku igrač može imati?

**Rješenje:** Neka $(a, b, c)$ označava trenutan broj kartica s vrijednostima $(1, 10, 25)$, respektivno. Nakon

- uložene kartice of 1 boda, imamo $(a - 1, b + 1, c)$;
- uložene kartice of 10 bodova, imamo $(a + 1, b - 1, c + 1)$;
- uložene kartice of 25 bodova, imamo $(a, b + 2, c - 1)$.

Na početku smo imali $(a, b, c) = (0, 1, 0)$. Ako smo $x$ puta uložili karticu od 1 boda, $y$ puta karticu od 10 bodova i $z$ puta karticu od 25 bodova, nakon toga ćemo imati

$$(-x + y, 1 + x - y + 2z, y - z).$$

Kako na kraju imamo tačno 100 kartica od 1 boda, znamo

$$-x + y = 100.$$

treba dakle naći najmanju vrijednost za

$$S = (-x + y) + 10 \cdot (1 + x - y + 2z) + 25 \cdot (y - z) = 10 + 9x + 16y - 5z.$$

Kako je $x = y - 100$, gornji izraz prelazi u

$$S = 10 + 9y - 900 + 16y - 5z = -890 + 5(5y - z)$$

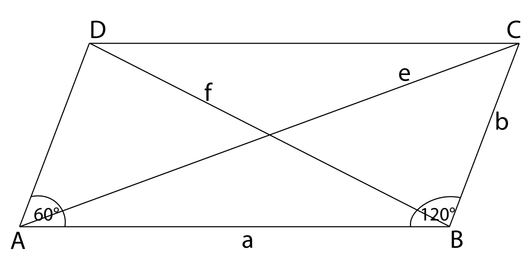
što će biti najmanje kada $5y - z$ bude najmanje moguće, tj. kada je $y$ što manje, a $z$ što veće. Primijetimo da mora biti

$$y = x + 100 \geq 100, \quad 1 + x - y + 2z \geq 0, \quad y - z \geq 0 \implies y \geq 100, \quad 2z \geq 99, \quad y \geq z.$$

Rezultat je dakle najmanji za $y = z = 100$ i tada je $S = 1110$.

4. U paralelogramu tup ugao iznosi $120°$, a dužine dijagnala se odnose kao $\sqrt{109} : \sqrt{39}$. U kojem su odnosu dužine stranica ovog paralelograma?

**Rješenje:**




Označimo dužine stranica paralelograma sa $a$ i $b$, a dužine dijagonala sa $e$ i $f$. Na osnovu kosinusne teoreme imamo: $e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 120°$ i $f^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60°$. Koristeći uslov zadatka slijedi:

$$\frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos 120°}{a^2 + b^2 - 2ab\cos 60°} = \frac{109}{39}.$$

Sredjivanjem dobijamo jednačinu

$$35a^2 - 74ab + 35b^2 = 0 \Leftrightarrow (7a - 5b)(5a - 7b) = 0.$$

Slijedi

$$\frac{a}{b} = \frac{5}{7} \text{ ili } \frac{a}{b} = \frac{7}{5}.$$