Prirodno-matematički fakultet

Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2015

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za IV razred srednje škole

1. Dokazati nejednakost

$$\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} \leq 2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

Rješenje: Dokaz indukcijom.

Baza: $n = 1$

$$\frac{1}{2\sqrt{1}} \leq 2 - \frac{2}{\sqrt{2}},$$

što je istina.

Pretpostavka: Za svaki $n \in \mathbf{N}$ važi

$$\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} \leq 2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

Korak:

$$\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} + \frac{1}{(n+2)\sqrt{n+1}}$$
$$< 2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{(n+2)\sqrt{n+1}} = 2 - \frac{2n+3}{(n+2)\sqrt{n+1}}.$$

Dokažimo $\frac{2n+3}{(n+2)\sqrt{n+1}} > \frac{2}{\sqrt{n+2}}$ tj.

$2n + 3 > 2\sqrt{(n+1)(n+2)} \Leftrightarrow (2n+3)^2 > 4(n+1)(n+2) \Leftrightarrow 4n^2 + 12n + 9 > 4n^2 + 12n + 8$

što je očigledno tačno.

Dakle,

$$2 - \frac{2n+3}{(n+2)\sqrt{n+1}} < 2 - \frac{2}{\sqrt{n+2}}.$$

Dokaz je gotov.

2. Zamislimo proceduru koja se odvija po sljedećim pravilima. Date su kartice s vrijednostima od 1, 10 i 25 bodova. Ako uložite karticu od 1 boda, dobijate karticu od 10 bodova. Ako uložite karticu od 10 bodova, dobijate 1 karticu od 1 boda i jednu karticu od 25 bodova. Ako uložite karticu od 25 bodova dobijate 2 kartice po 10 bodova.

   Na početku igrač ima jednu karticu od 10 bodova.

   Nakon nekog vremena igrač ima tačno 100 kartica sa po jednim bodom i nešto drugih kartica. Koja je najmanja vijednost kartica koju u tom trenutku igrač može imati?

   Rješenje: Neka (a, b, c) označava trenutan broj kartica s vrijednostima $(1, 10, 25)$, respektivno. Nakon

   - uložene kartice of 1 boda, imamo $(a-1, b+1, c)$;
   - uložene kartice of 10 bodova, imamo $(a+1, b-1, c+1)$;
   - uložene kartice of 25 bodova, imamo $(a, b+2, c-1)$.

   Na početku smo imali $(a, b, c) = (0, 1, 0)$. Ako smo x puta uložili karticu od 1 boda, y puta karticu od 10 bodova i z puta karticu od 25 bodova, nakon toga ćemo imati

$$(-x+y, 1+x-y+2z, y-z).$$

   Kako na kraju imamo tačno 100 kartica od 1 boda, znamo

$$-x+y = 100.$$

   treba dakle naći najmanju vrijednost za

$$S = (-x+y) + 10 \cdot (1+x-y+2z) + 25 \cdot (y-z) = 10 + 9x + 16y - 5z.$$

   Kako je $x = y - 100$, gornji izraz prelazi u

$$S = 10 + 9y - 900 + 16y - 5z = -890 + 5(5y - z)$$

što će biti najmanje kada $5y - z$ bude najmanje moguće, tj. kada je y što manje, a z što veće. Primijetimo da mora biti

$$y = x + 100 \geq 100,\ 1 + x - y + 2z \geq 0,\ y - z \geq 0 \implies y \geq 100, \quad 2z \geq 99, \quad y \geq z.$$

Rezultat je dakle najmanji za $y = z = 100$ i tada je $S = 1110$.

3. Izračunati sumu

$$1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \cdots + 2015 \cdot 2^{2014}.$$

Rješenje: Posmatrajmo sumu

$$\sum_{n=1}^{2015} x^n = x\frac{x^{2015} - 1}{x - 1}.$$

Nalazeći izvod ove sume, dobijamo

$$\sum_{n=1}^{2015} nx^{n-1} = \left(x\frac{x^{2015} - 1}{x - 1}\right)' = \left(\frac{x^{2016} - x}{x - 1}\right)' = \frac{(2016x^{2015} - 1)(x - 1) - (x^{2016} - x)}{(x - 1)^2}.$$

Uvrštavajući ovdje $x = 2$ zaključujemo:

$$\sum_{n=1}^{2015} n2^{n-1} = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + 2015 \cdot 2^{2014} = 2014 \cdot 2^{2015} + 1.$$

Zadatak se može riješiti i bez upotrebe izvoda. Naime,

$$\sum_{n=1}^{2015} n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{2014} \sum_{j=k}^{2014} 2^j = \sum_{k=0}^{2014} \frac{2^k(2^{2015-k} - 1)}{2 - 1} = \sum_{k=0}^{2014} (2^{2015} - 2^k)$$
$$= 2015 \cdot 2^{2015} - (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{2014}) = 2015 \cdot 2^{2015} - (2^{2015} - 1) = 2014 \cdot 2^{2015} + 1.$$

4. Na stranici AB oštrouglog trougla ABC data je tačka S. Neka su P i Q centri kružnica opisanih oko trouglova ASC i BSC. Odrediti položaj tačke S (na stranici AB) tako da trougao PQS ima najmanju moguću površinu.

Rješenje: Označimo uglove trougla sa α, β i γ. Po uslovu zadatka imamo $\alpha, \beta, \gamma < 90°$. Neka je $\omega = \angle ASC$. Kako je SP poluprečnik kružnice opisane oko trougla ASC, to važi

$$|SP| = \frac{|AC|}{2\sin\omega}.$$

Analogno, SQ je poluprečnik kružnice opisane oko trougla BCS pa važi:

$$|SQ| = \frac{|BC|}{2\sin(\pi - \omega)} = \frac{|BC|}{2\sin\omega}.$$

Dalje je

$$\angle PSQ = \angle PSC + \angle QSC =$$
$$(90° - \frac{1}{2}\angle SPC) + (90° - \frac{1}{2}\angle SQC) =$$
$$(90° - \alpha) + (90° - \beta) = 180° - \alpha - \beta = \gamma.$$

Dobijamo da je

$$P_{PQS} = \frac{1}{2}|SP| \cdot |SQ| \sin\angle PSQ = \frac{|AC| \cdot |BC| \cdot \sin\gamma}{8\sin^2\omega} = \frac{P_{ABC}}{4\sin^2\omega}.$$

Minimum se dostiže za $\sin^2\omega = 1$ to jest za $\omega = 90°$ odnosno kada je S podnožje visine iz tjemena C na stranicu AB.