Prirodno-matematički fakultet

Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2015

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za II razred srednje škole

1. Za brojeve $x, y, z \in \mathbb{R}$ i $a, b, c \in \mathbb{R}$ važi

$$\begin{aligned}1+x+y+xy&=a\\1+y+z+yz&=b\\1+z+x+zx&=c.\end{aligned}$$

a) Izraziti $(1+x)(1+y)(1+z)$ preko a, b, c.

b) Izraziti x, y i z preko a, b i c.

Rješenje:

a) Primijetimo

$$1+x+y+xy=(1+x)(1+y),\ 1+y+z+yz=(1+y)(1+z);\ 1+z+x+zx=(1+z)(1+x).$$

Množeći ove jednakosti i uzimajući u obzir uslov zadatka, dobijamo:

$$(1+x)^2(1+y)^2(1+z)^2=abc \implies (1+x)(1+y)(1+z)=\sqrt{abc}.$$

b) Dijeljeći $(1+x)(1+y)(1+z)=\sqrt{abc}$ s $1+x+y+xy=a$, $1+y+z+yz=b$ i $1+z+x+zx=c$, dobijamo

$$1+z=\sqrt{\frac{bc}{a}},\quad 1+x=\sqrt{\frac{ac}{b}},\quad 1+y=\sqrt{\frac{ab}{c}}.$$

2. Dokazati nejednakost

$$x^4 + 2015x^2 + y^2 + 2015|y| + 2 \geq 4030x\sqrt{|y|} \tag{1}$$

Rješenje: Na osnovu odnosa između aritmetičke i geometrijske sredine, znamo

$$x^4 + 1 \geq 2x^2 \ \text{ i } \ y^2 + 1 \geq 2|y|.$$

Uvrštavajući ovo u (1) i opet koristeći odnos između aritmetičke i geometrijske sredine, zaključujemo:

$$x^4 + 2015x^2 + y^2 + 2015|y| + 2 \geq 2017(x^2 + |y|) \geq 2015(x^2 + |y|) \geq 4030x\sqrt{|y|}.$$

3. Odrediti sve uglove α za koje je $\cos(80 + 2\alpha) = \sin(10 + \alpha)$. Za takve α odrediti

$$\frac{1}{2\sin(\alpha + 10)} - 2\sin(\alpha + 70).$$

Uglovi su dati u stepenima.

Rješenje: Iz

$$\cos(80^\circ + 2\alpha) = \sin(10^\circ + \alpha) \implies \sin(10^\circ - 2\alpha) = \sin(10^\circ + \alpha)$$

odakle slijedi da je za svako $k \in \mathbf{Z}$

$$10^\circ - 2\alpha = 10^\circ + \alpha - 360^\circ k \implies \alpha = 120^\circ k$$

ili

$$180^\circ - (10^\circ - 2\alpha) = 10^\circ + \alpha + 360^\circ k \implies \alpha = -160^\circ + 360^\circ k.$$

Za dokaz drugog dijela zadatka, primijetimo:

$$\sin(\alpha + 10^\circ)\sin(\alpha + 70^\circ) = \frac{1}{2}(\cos(60^\circ) - \cos(80^\circ + 2\alpha)) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \cos(80^\circ + 2\alpha)). \tag{2}$$

Dalje,

$$\frac{1}{2\sin(\alpha + 10^\circ)} - 2\sin(\alpha + 70^\circ) = \frac{1 - 4\sin(\alpha + 10^\circ)\sin(\alpha + 70^\circ)}{2\sin(\alpha + 10^\circ)} \overset{(2)}{=} \frac{\cos(80^\circ + 2\alpha)}{\sin(10^\circ + \alpha)} = 1,$$

na osnovu pretpostavke iz zadatka.

4. Dužina stranice kvadrata $ABCD$ je $6cm$. Na stranicama AB i AD date su tačke K i L takve da je $|AK| = 2cm$ i $|AL| = 3cm$. U kvradrat je upisan trapez sa osnovicom KL. Kolika je najveća moguća površina upisanog trapeza?

Rješenje: Neka je NM druga osnovica trapeza. Uvažavajući zahtjev da površina trapeza bude najveća, lako se zaključuje da NM mora biti sa drge strane dijagonale BD. Kako je KL paralelno sa NM to zaključujemo da je ΔAKL sličan sa ΔCNM. Slijedi da je $2 : 3 = |AK| : |AL| = |CN| : |CM|$. Zato je $|CN| = 2x$, a $|CM| = 3x$, za neki broj $x > 0$. Površina P upisanog trapeza iznosi $P = P_{ABCD} - P_{\Delta AKL} - P_{\Delta KBM} - P_{\Delta MCN} - P_{\Delta NLD}$. Dobijamo da je

$$P = 36 - \frac{3 \cdot 2}{2} - \frac{4 \cdot (6 - 3x)}{2} - \frac{3x \cdot 2x}{2} - \frac{3 \cdot (6 - 2x)}{2} = -3x^2 + 9x + 12.$$

Kvadratna funkcija $f(x) = -3x^2 + 9x + 12$ dostiže maksimum za $x = \frac{3}{2}$. Slijedi da najveća moguća površina upisanog trapeza iznosi $P_{MAX} = \frac{75}{4}$.